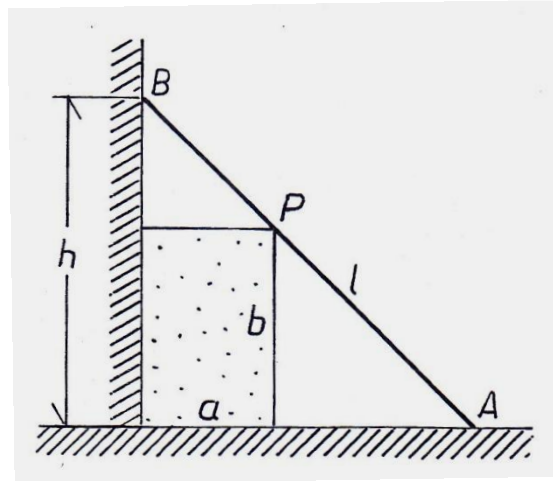


A LÉTRAPROBLÉMA

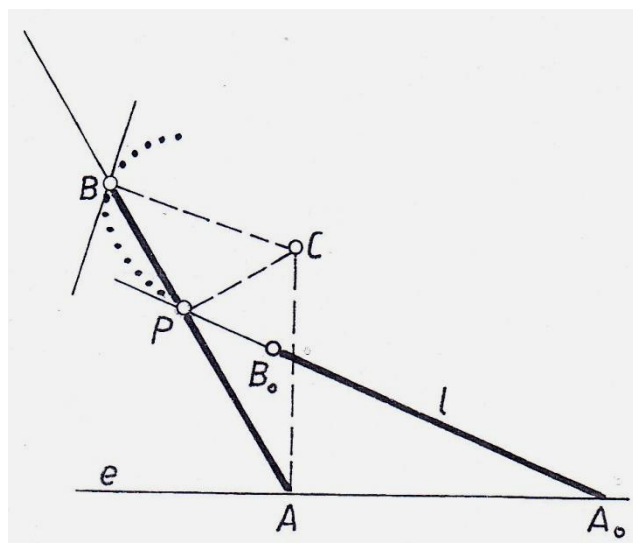
Írta: Hajdu Endre

Egy l hosszúságú létra támaszkodik a padlóra és egy a, b méretű bútordarabhoz; kérdés: milyen magasságban érintheti a létra szabad végpontja a bútor mögötti falat? (1. ábra).



1. ábra

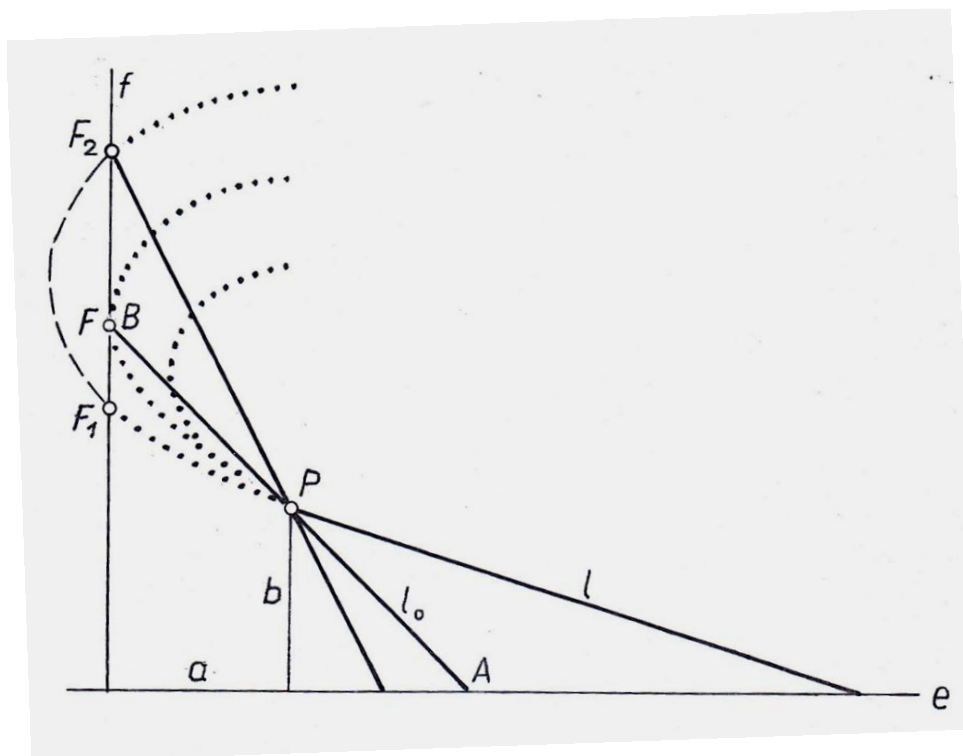
Ha a létrát – melyet a következőkben csak rúdként említünk – úgy mozgatjuk, hogy az A végpontja a padlón marad, miközben a rúd továbbra is a P ponttal érintkezik, akkor a B végpont egy konchoid görbe [1] ívdarabját írja le. A konchoidra vonatkozó ismeretek megtalálhatók a világhálón, itt csak a problémánk szempontjából lényeges tényeket foglaljuk össze: a görbe egyik ágát úgy kapjuk, ha egy félegyenes A kezdőpontja valamely e egyenesen mozog, miközben a félegyenes egy rögzített P pontra támaszkodik, s a mozgó félegyenes B pontja a görbét írja le (2. ábra). Ha az AB távolság nagyobb, mint P -nek az e egyenestől mért távolsága, akkor a leírt pályagörbe hurkot tartalmaz.



2. ábra

A pályagörbe tetszőleges pontjához tartozó érintő kinematikai alapon megszerkeszthető: az AB szakasz pillanatnyi forgáscentruma, vagyis sebességpólusa, a két pont sebességvektorainak állása ismeretében előállítható; az A ponté azonos az e egyenesével, a félegyenesnek a P ponttal egybeeső pontjához tartozó sebesség meg azonos állású a félegyenesével. Az említett pontokban a megfelelő egyenesekre állított merőlegesek közös C pontja a pillanatnyi sebességpólus. A B pont sebességvektorának állása, mely azonos a B -beli érintőével, merőleges a CB szakaszra.

Visszatérve eredeti problémánkra, megállapítható, hogy különböző $AB = l$ rúd-hosszak esetén a B rúdvégpont által leírt ívet, azaz konchoid-darabot nem érinti a fal egyenese, ha $l < l_0$ ahol az utóbbi a fal egyenesét éppen érintő pályagörbéhez tartozó rúdhossz (3. ábra). A legkisebb rúdhossznál nagyobb l esetén két pontban metszi a pályagörbe a fal egyenesét, melyek közül az F_2 -vel jelölt felső a keresett, h magasságú pont.

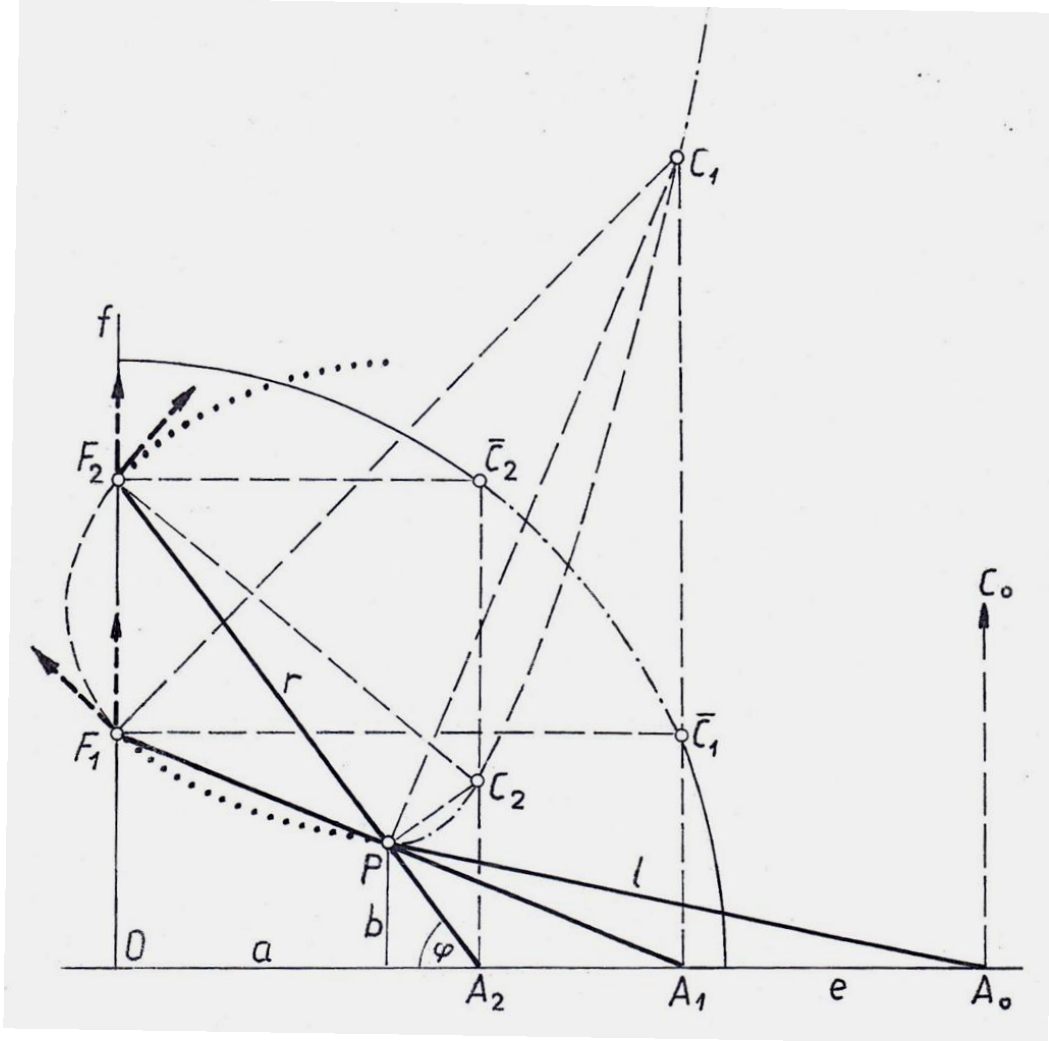


3. ábra

A legkisebb rúdhosszt is kinematikai meggondolás alapján állapítjuk meg. A 4. ábrából, mely a sebességviszonyokat szemlélteti, kitűnik, hogy a minimális hosszúságú rúd B végpontja még fel/le mozdulhat, vagyis az A pont sebessége bal vagy jobb irányba mutathat. Mindkét lehetőség esetén a rúd sebességpólusa a C pont, s a rúdnek a P ponttal egybeeső pontja a CP egyenesre merőleges irányba mozdul el, vagyis a sebességpólusnak a rúdra vonatkozó talppontja P .

Ekkor fennállnak a következő kapcsolatok: $b + a \cdot \tan \varphi = \frac{a}{\cos^2 \varphi} \tan \varphi$, amelyből

egyenletet kapjuk: $r^4 - 2lr^3 + (l^2 - a^2 - b^2)r^2 + 2a^2lr - a^2l^2 = 0$. A P pont köré írt r sugarú körív a fal egyenesét az F_2 pontban metszi, melynek ismeretében a keresett h magasság kiszámítása már egyszerű.



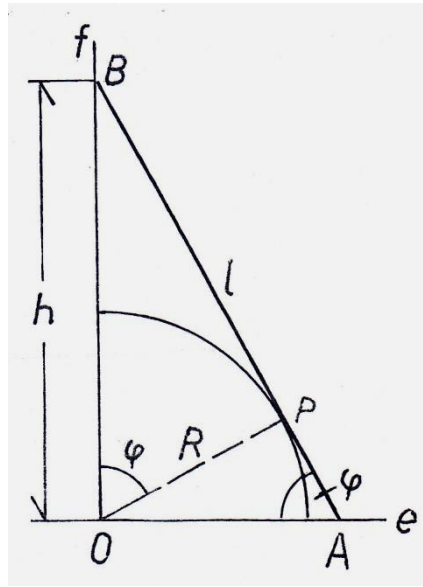
5. ábra

Az imént tárgyalt esetben, vagyis mikor a rúd hossza nagyobb, mint a minimális hossz, akkor a fal felé mozgó rúd az ütközés pillanatáig (vagyis amíg alsó végpontja A_0 -ból A_1 -be jut) sebességpólusa az álló pólusgörbének C_0C_1 parabolaívét futja be (a C_0 pont az ábrán nem látható). Az ütközés után a B végpont sebessége függőleges lesz, mindaddig, míg el nem éri az F_2 pontot. Ez alatt a rúd sebességpólusa a $\bar{C}_1\bar{C}_2$ körívet írja le, a rúd nem támaszkodik a P pontra. Az F_2 pont elérése után a rúd ismét P re támaszkodik, sebességpólusa a C_2P parabolaívet írja le.

VÁLTOZATOK A LÉTRAPROBLÉMÁRA

Ha a téma ismertetésében említett „bútordarab” valamely „vízszintes” tengelyű henger, vagyis – áttérve geometriai megfogalmazásra – a rudat támasztó elem nem pont, hanem egy körlemez, akkor az eredeti probléma változataihoz jutunk.

A. A körlemez középpontja az e, f egyenesek közös O pontja (6. ábra). Ez esetben a legkisebb rúd hossz, ill. dőlésszög $l_0 = 2R$, $\varphi = 45^\circ$.



6. ábra

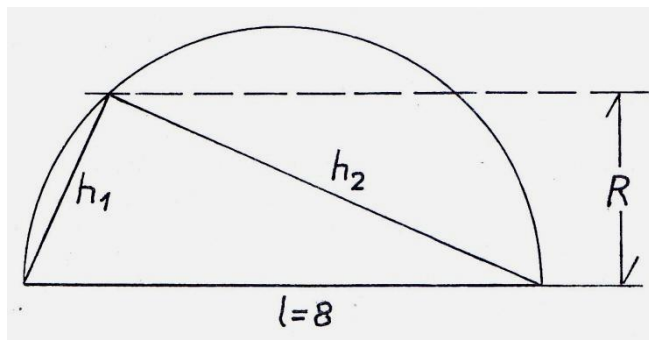
Ha a rúd hossza nagyobb a minimálisnál, akkor a B végpont szélső helyzetei a fal egyenesén az ábra derékszögű háromszögeinek hasonlóságai alapján rövid

számítással kijelölhetők: $\sin \varphi = \frac{R}{\sqrt{l^2 - h^2}} = \frac{h}{l}$, négyzetre emelve, rendezve

$$h^4 - l^2 h^2 + R^2 l^2 = 0, \quad h^2 = x \text{ jelöléssel } x_{1,2} = \frac{l^2 \pm \sqrt{l^4 - 4R^2 l^2}}{2}.$$

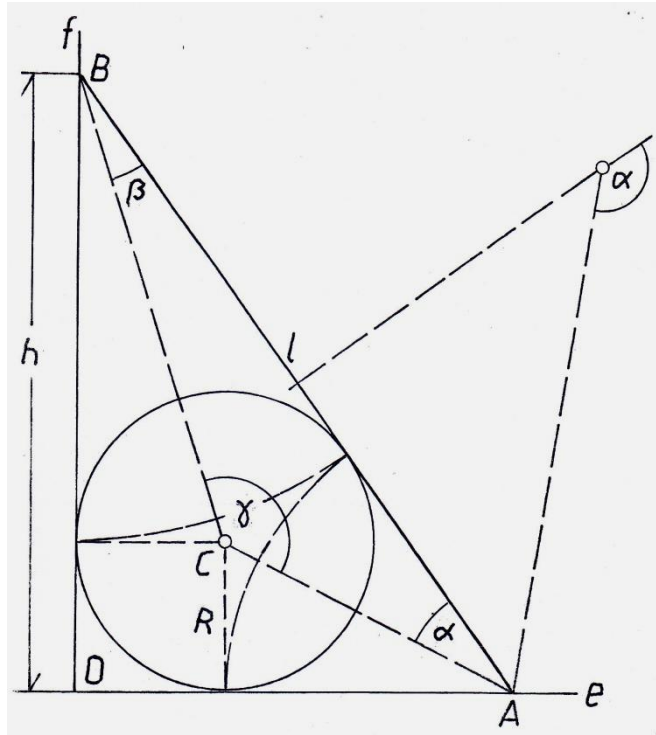
Pl. $R = 3, l = 8$ esetén $x_1 = 10,83 \rightarrow h_1 = 3,29$
 $x_2 = 53,16 \rightarrow h_2 = 7,29$.

Szerkesztéssel is igen egyszerű a h magasság megállapítása: R mértani közép - arányosa a rúd azon két darabjának, melyre a P pont a rudat osztja (6. és 7. ábra).



7. ábra

B. A másik jellegzetes eset az, ha a körlemez érinti a padló és a fal egyenesét (8. ábra). Ekkor a minimális rúd hossz $l_0 = 2R(1 + \sqrt{2}) \approx 4,82 R$

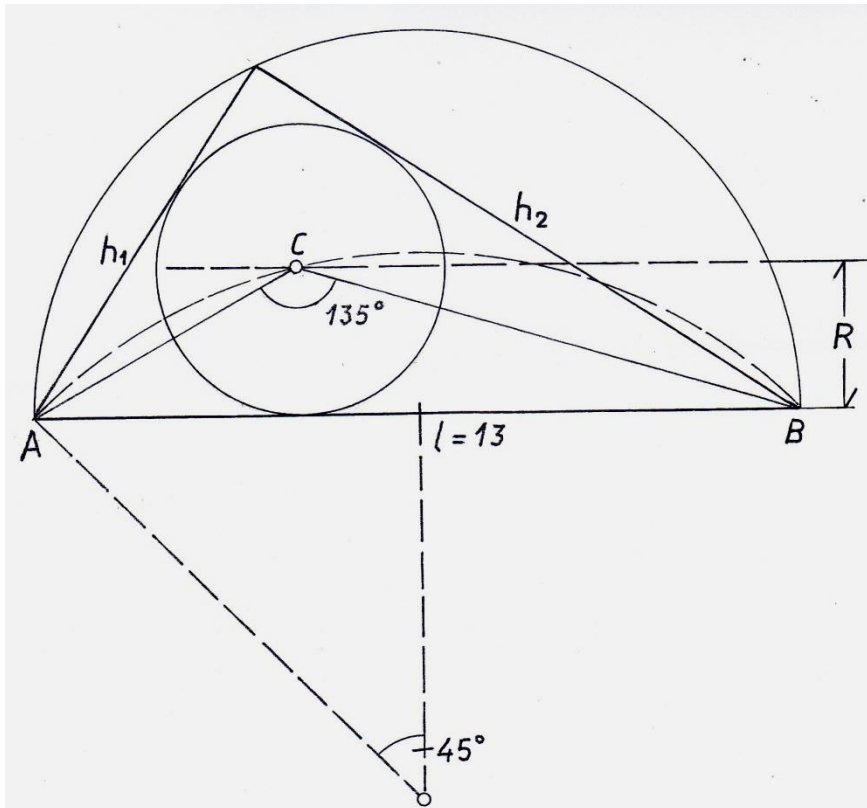


8. ábra

Ennél rövidebb rúd végpontja nem éri el a fal egyenesét (ha alsó végpontja a padlón marad), hosszabb rúd végpontjának görbéje két pontban metszi a fal egyenesét. A két metszéspont magassága a 8. ábrából érthető egyenlet alapján számítható: $\sqrt{l^2 - h^2} - R + h - R = l$, rendezve és négyzetre emelve az alábbi másodfokú egyenlet adódik: $h^2 - (l + 2R)h + 2R(R + l) = 0$, innen

$$h_{1,2} = \frac{l + 2R \pm \sqrt{l^2 - 4R(l + R)}}{2}.$$

Pl. $R = 2,5$ és $l = 13$ esetén $h_1 = 7,13$ és $h_2 = 10,88$ az eredmény. Ha szerkesztéssel kívánjuk meghatározni a magassági adatokat, akkor az $l = 13$ hosszúságú szakasz felvétele után (9. ábra) a körlemez középpontja a szakasz egyenesétől R távolságra lévő párhuzamoson lesz. Kijelölése végett vegyük észre, hogy a 8. ábra ABC háromszögének γ szöge 135° , ezért a 9. ábra megfelelő háromszögének körülírt kör-középpontját úgy kapjuk, ha az AB szakasz középpontjától felmérjük a szakaszra merőlegesen az $l/2$ távolságot s az így kapott pont köré írt kör kimetszi a beírt R sugarú kör C középpontját. A beírt körhöz az A, B pontokból húzott érintők megfelelő szakaszhosszai a keresett h_1 és h_2 távolságok.



9. ábra

Források:

[1] <http://mathworld.wolfram.com/Conchoidof Nicomedes.html>

[2] Ladder over a fence – mathematics archives

2018. 02. 07.